Tentamen Metrische Ruimten, 2002

26 augustus 2002

Graag naam op ieder vel. Verklaar je antwoorden; alleen “ja” of “nee” volstaat niet. Het gebruik van programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan.

Opgave 1: Neem $X = \{x = x_1x_2x_3\ldots \mid x_i \in [0,1]$ en $x_i \neq 0$ ten hoogste eindig vaak$\}$. Definiëer $d(x,y)$ als het aantal coördinaten waarin $x_i \neq y_i$.
a) Controleer dat (X,d) een metriek is. Wat is de diameter $\mathrm{diam}(X)$?
b) Is (X,d) compact?
c) Is (X,d) volledig?

Opgave 2:
a) Bewijs dat een gesloten deel van een compacte verzameling opnieuw compact is.
b) Formuleer de stelling van Heine-Borel. Geef een voorbeeld van een gesloten begrensde verzameling die niet compact is.
c) Laat P de verzameling zijn van polynomen $p(x) = a_7x^7 + \cdots + a_0$ die voldoen aan $\sum_{i=0}^{7} |a_i| \leq 10$. Als $x \in [0,1]$ genomen wordt, kun je P opvatten als deelverzameling van $C([0,1])$, met sup-metriek. Is P dan een compacte deelverzameling?
d) Stel dat (p_i) een puntsgewijs convergente deelrij is van P. Is (p_i) uniform convergent?

Opgave 3: Laat $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ gegeven zijn door $(Tf)(x) = 1 + \int_0^x f(s)ds$. Geef $C([0,1])$ de sup-metriek.
a) Laat zien dat T geen contractie is, maar $T \circ T$ wel.
b) Toon aan dat T ten hoogste één dekpunt heeft en vind het (bijv. door middel van een geschikte differentiaalvergelijking).

Opgave 4: Neem P de verzameling van alle polynomen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $\|p\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |p(x)|^2 e^{-|x|} dx}$.
a) Gegeven is that $\|\ \|$ aan de driehoeksongelijkheid voldoet. Laat zien dat $\|\ \|$ een norm is.
b) Is $(P, \|\ \|)$ een inproduct ruimte?
c) Laat X de ruimte van continue functies $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ zijn. Als we het argument x beperken tot $[-1,1]$, dan is P een deelruimte van $(X, \|\ \|)$. Toon aan dat P dicht ligt in $(X, \|\ \|)$.
(Hint: Denk aan Stone-Weierstrass, maar bedenk ook dat $\|\ \|$ niet de sup-norm is.)
d) Laat Y de ruimte van functies $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ zijn die begrensd zijn en continu op $[-1,0) \cup (0,1]$. Laat zien dat P ook dicht ligt in $(Y, \|\ \|)$.